Recasages possibles : 224, 235, 262, 264.
Référence : 131 Développements pour l'oral, Lesesvre, Montagnon, Barbenchon, Pierron

Développement Le but est de montrer la formule de Stirling en utilisant des variables aléatoires de loi de Poisson et le théorème central limite.

Lemme 1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a indépendantes et de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)dt.$$

Théorème 2 On a l'équivalent en $+\infty$ suivant : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

- *Preuve du Lemme 1* : Comme une loi de Poisson admet un moment d'ordre 2 (en fait elle admet des moments à tout ordre), on peut appliquer le théorème central limite à la suite (X_n). Pour cela, rappelons que $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{V}(X_1) = 1$. Ainsi, on a la convergence en loi suivante

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}S_n - 1\right) = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z.$$

Ainsi, comme la convergence en loi implique la convergence simple de la suite des fonctions de répartition vers la fonction de répartition de la loi limite, en tout point où cette dernière est continue (dans le cas présent, c'est en fait partout), on a $\forall t \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leqslant t) = \mathbb{P}(Z \leqslant t)$. En passant aux complémentaires, on obtient $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Z_n > t) = \big(1 - \mathbb{P}(Z_n \leqslant t)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \mathbb{P}(Z \leqslant t) = \mathbb{P}(Z > t)$.
Pour conclure la preuve du lemme, on veut alors utiliser le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$ par $f_n(t) = \mathbb{P}(Z_n > t)$. L'argument précédent montre la convergence simple de (f_n) vers la fonction $f : t \mapsto \mathbb{P}(Z > t)$. Pour l'hypothèse de domination, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n est de carré intégrable et on a $\mathbb{E}[Z_n^2] = \frac{\mathbb{E}[(S_n-n)^2]}{n} = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n} = 1$. En effet, $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = n$ par indépendance des X_i. De plus, on a l'inclusion ensemblistes $\{Z_n > t\} \subset \{Z_n^2 > t^2\}$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, d'après l'inégalité de Markov appliquée à la v.a positive Z_n^2, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n > t) \leqslant \mathbb{P}(Z_n^2 > t^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}[Z_n^2]}{t^2} = \frac{1}{t^2}.$$

On pose alors $g : t > 0 \mapsto \min(1, \frac{1}{t^2})$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $\mathbb{P}(Z_n > t) \leqslant g(t)$. De plus, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0, et intégrable en $+\infty$ d'après le critère de Riemann. Ainsi, les hypothèses du théorème de convergence dominée sont bien vérifiées, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)dt.$$

Ceci conclut la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Théorème 2* : L'idée est de calculer explicitement les deux membres de l'égalité donnée par le **Lemme 1** afin d'en déduire la formule de Stirling. Calculons tout d'abord le membre de droite. Rappelons que la variable aléatoire Z admet pour densité la fonction $f_Z : u \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$. De plus, par définition de la densité d'une variable aléatoire absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on a

$$\mathbb{P}(Z > t) = \int_t^{+\infty} f_Z(u)du.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right) dt.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli, puisque $\forall u, t > 0,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathbb{1}_{u>t} \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(\int_0^u dt\right) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{A\to+\infty} -e^{-\frac{A^2}{2}} + e^{-\frac{0^2}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Pour calculer le membre de gauche, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \sim \mathcal{P}(n)$. On peut par exemple le voir via les fonctions génératrices : soient $\lambda > 0$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ dont on note G la fonction génératrice définie pour $s \in [-1,1]$ par $G(s) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)s^k$. On a

$$G(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k s^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par indépendance des X_i, on a

$$G_{S_n}(s) = (G_{X_1}(s))^n = \left(e^{s-1}\right)^n = e^{n(s-1)}.$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$, d'où $S_n \sim \mathcal{P}(n)$ car la fonction génératrice caractérise la loi. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(S_n = k) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}$. Par conséquent, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n > t) = \mathbb{P}(S_n > t\sqrt{n} + n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{1}_{\{k > t\sqrt{n}+n\}}.$$

En utilisant à nouveau le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{t < \frac{k-n}{\sqrt{n}}\}} dt \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!} \left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{n^k}{(k-1)!} - \frac{n^{k+1}}{k!}\right) \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\frac{n^{n+1}}{n!} - \lim_{N\to+\infty} \frac{n^{N+1}}{N!}\right) \\
&= \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}.
\end{aligned}$$

Finalement, d'après le **Lemme 1**, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ce qui équivaut exactement à la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.